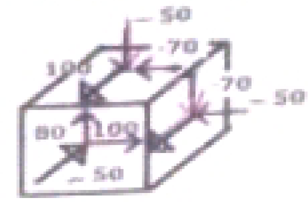
Solution d'Exercice 2

1) présentation graphique des composantes du tenseur des contraintes ? **(1pts)**

Tenseur de contrainte

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} -50 & 100 & 80 \\ 100 & -50 & -70 \\ 80 & -70 & -50 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Representation schematique



1

2) vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$ qui agit au point (S) sur la facette de la normale, $\vec{n} = 1\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$? **(1pts)**

Les composantes du vecteur contrainte sont (formule de Cauchy : $\{T(M,\vec{n})\} = [\sigma(M)]\{n\}$) :

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -50 & 100 & 80 \\ 100 & -50 & -70 \\ 80 & -70 & -50 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 90 \\ 90 \\ -30 \end{Bmatrix} \text{ MPa}$$

1,5

3) contrainte normale ? **(1,5pts)** $\sigma_n = \{90 + 270 + 60\} = 420$ MPa

Les composantes du vecteur contrainte sont (formule de Cauchy : $\{T(M,\vec{n})\} = [\sigma(M)]\{n\}$) :

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -50 & 100 & 80 \\ 100 & -50 & -70 \\ 80 & -70 & -50 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 90 \\ 90 \\ -30 \end{Bmatrix} \text{ MPa}$$

1,5

4) composantes du vecteur cisaillement $\vec{\tau}_n$? **(1,5pts)**

les composantes du vecteur cisaillement ($\vec{\tau}_n = \vec{T}(M,\vec{n}) - \sigma_n \vec{n}$) :

$$\begin{Bmatrix} \tau_{nx} \\ \tau_{ny} \\ \tau_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 90 \\ 90 \\ -30 \end{Bmatrix} - 420 \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -330 \\ -1170 \\ 810 \end{Bmatrix} \text{ MPa}$$

1,5

Solution d'Exercice 3

1) tenseur déformations $[\varepsilon]$? **(1,5pt)**

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & -2x & 3 \\ 0 & 3 & -2z \end{bmatrix}$$

1,5

2) déformations $[\varepsilon] \times 10^{-6}$ au au point **M(1 , 1 , 1)** ? **(1,5pt)**

$$\varepsilon_M \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} 10^{-6}$$

1,5

3) déformations principales ε_1, ε_2 et ε_3 au point **M(1 , 1 , 0)** ? **(2pts)**

$$P(\lambda) = \det([\varepsilon] - \varepsilon_n [I]) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varepsilon_p & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_p & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_p \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} 2-\varepsilon_p & 0 & 0 \\ 0 & -2-\varepsilon_p & 3 \\ 0 & 3 & -2-\varepsilon_p \end{bmatrix} = 0$$

2

$$(2-\varepsilon_p)[(-2-\varepsilon_p)(-2-\varepsilon_p)-9] = (2-\varepsilon_p)[(-2-\varepsilon_p)^2 - 9] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_p = 2 \cdot 10^{-6}} \quad \ldots = 0 \Rightarrow [(-2-\varepsilon_p)+3][(-2-\varepsilon_p)-3] = 0 \quad \boxed{\varepsilon_p = 1 \cdot 10^{-6}} \quad \boxed{\varepsilon_p = -5 \cdot 10^{-6}}$$

Solution d'exam Elasticité

- Question de cours

① critères de l'élasticité : - Rankine
- Tresca
- von Mises

1,5

② le but de calcul des contraintes principales pour calculer ou vérifier la limite élastique d'une pièce.

1

③ - tenseur des contraintes : dans le plan $\{o, y, z\}$

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ 0 & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

1

- tenseur des déformations : $\varepsilon_{ij} = \left(\frac{1+\nu}{E}\right)\sigma_{ij} - \left(\frac{\nu}{E}\right)\delta_{ij}\sigma_{kk}$

$$\begin{cases} \varepsilon_{yy} = \left(\frac{1+\nu}{E}\right)\sigma_{yy} - \left(\frac{\nu}{E}\right)(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \\ \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \left(\frac{1+\nu}{E}\right)\sigma_{yz} \\ \varepsilon_{zz} = \left(\frac{1+\nu}{E}\right)\sigma_{zz} - \left(\frac{\nu}{E}\right)(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \end{cases} \longrightarrow 1$$

$$\varepsilon_{xx} = -\left(\frac{\nu}{E}\right)(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

$$\varepsilon_{yx} = \varepsilon_{zx} = 0$$

Ex. N. 1

ⓐ $\delta_{ij}\delta_{ij} = \delta_{ji}\delta_{ij} = \delta_{1i}\delta_{i1} + \delta_{2i}\delta_{i2} + \delta_{3i}\delta_{i3} = \delta_{11}\delta_{11} + \delta_{22}\delta_{22} + \delta_{33}\delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3$ 1

ⓑ $\varepsilon_{ijk} a_i a_k = \varepsilon_{123} a_2 a_3 + \varepsilon_{132} a_3 a_2 + \varepsilon_{213} a_1 a_3 + \varepsilon_{231} a_3 a_1 + \varepsilon_{312} a_1 a_2 + \varepsilon_{321} a_2 a_1$ 1

$= a_2 a_3 - a_3 a_2 - a_1 a_3 + a_3 a_1 + a_1 a_2 - a_2 a_1$

$= 0$

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$ 2

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \varepsilon_{mpi}\varepsilon_{mjk} a_i b_j c_k \vec{e_p} = (\delta_{pj}\delta_{ik} - \delta_{pk}\delta_{ij}) a_i b_j c_k \vec{e_p}$$

$$= \delta_{pj}\delta_{ik} a_i b_j c_k \vec{e_p} - \delta_{pk}\delta_{ij} a_i b_j c_k \vec{e_p}$$

$$= a_k b_p c_k \vec{e_p} - a_j b_j c_p \vec{e_p}$$

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (a_k \cdot c_k) b_p \vec{e_p} - (a_j b_j) c_p \vec{e_p}$$

avec, $a_k \cdot c_k = \vec{a} \cdot \vec{c}$

$a_j b_j = \vec{a} \cdot \vec{b}$

$\vec{b} = b_p \vec{e_p}$

$\vec{c} = c_p \vec{e_p}$