Université 8 mai 1945 Guelma

Faculté des Sciences et de la Technologie

L2 ST Examen de Mécanique des Fluides Date : 12 Février 2022 Durée : 1 h 30

Exercice 1 :

Pour les trois liquides non miscibles, figure 1, déterminer les hauteurs h_1 et h_2 ?
Les extrémités des trois tubes sont ouvertes à l'atmosphère.
On donne : la masse volumique du mercure $\rho_{Hg} = 13600\ kg/m^3$, la masse volumique de l'eau $\rho_{eau} = 1000\ kg/m^3$, la masse volumique de l'huile $\rho_{huile} = 780\ kg/m^3$.

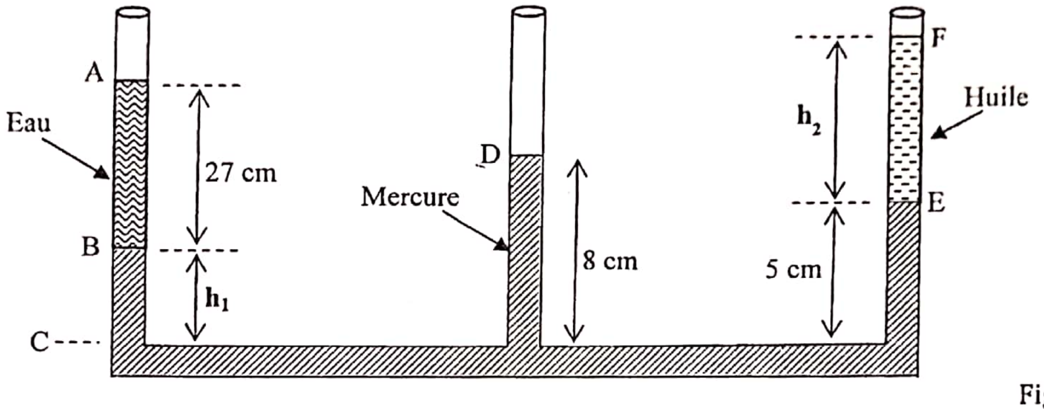

Figure 1

Exercice 2 :

Le poids spécifique de l'air qui s'écoule à travers une conduite convergente est $\gamma = 12\ N/m^3$, figure 2, la masse volumique du fluide du manomètre est $\rho_{huile} = 824\ kg/m^3$, les pertes de charge sont négligées, le (1) point est un point d'arrêt $V_1 = 0\,m/s$.

Dans ces conditions, calculer le débit volumique en (ℓ/s) ?
On donne : l'accélération de la pesanteur $g = 10\ m/s^2$.

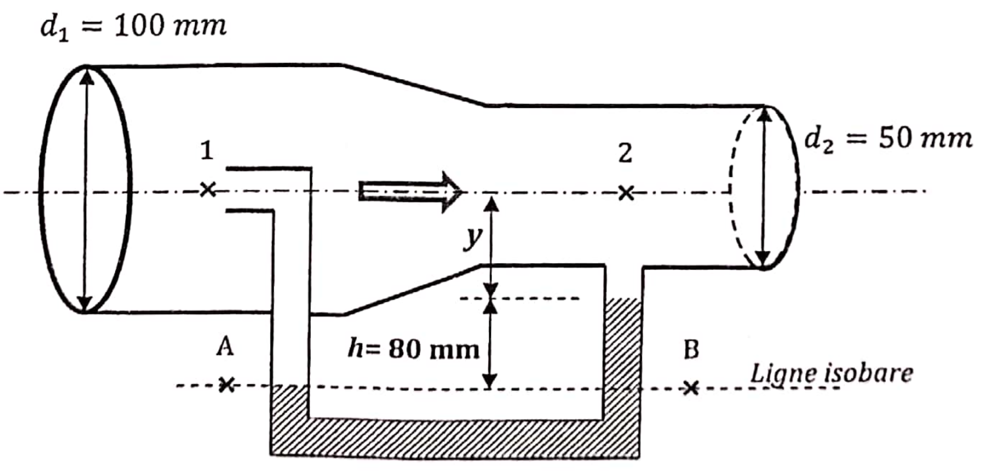

Figure 2

Exercice 3 :

Du carburant (fioul) de masse volumique $\rho = 910\ kg.m^{-3}$ et de viscosité dynamique (μ) est transporté de **A** vers **B** à travers une conduite cylindrique d'axe horizontal, de longueur $l = 2\ km$ et de rayon $R = 8\ cm$, avec un débit volumique $Q_v = 36\ m^3/heure$, figure 3.

Les pressions en A et B sont respectivement $P_A = 3$ *atmosphères* et $P_B = 0.4$ *atmosphères* (*1 atmosphère* $=10^5\ Pa$).

On admettra que le régime d'écoulement est permanent, le débit est donné par la formule de *Poiseuille.*

1. Calculer la vitesse moyenne d'écoulement (v) du carburant?
2. Calculer la viscosité dynamique (μ) et la viscosité cinématique (ν) du carburant transporté ?
3. Calculer le nombre de Reynolds de cet écoulement, est-il laminaire ou turbulent ? justifier votre réponse ?
4. Montrer que la puissance ($\mathcal{P}$) de la pompe utilisée dans la conduite est proportionnelle au carré de la vitesse moyenne (v) ; calculer ($\mathcal{P}$) ?

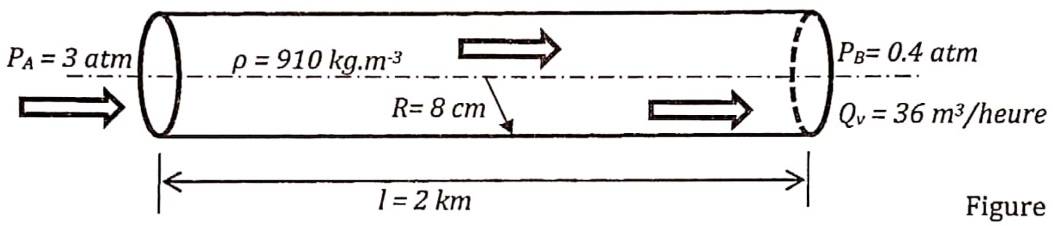

Figure 3

Questions de cours :

1. Donner la définition d'une ligne de courant ? montrer que dans le cas d'un écoulement 3 dimensions les lignes de courant sont données par le système différentiel :
$$\frac{dx}{u(x,y,z,t)} = \frac{dy}{v(x,y,z,t)} = \frac{dz}{w(x,y,z,t)}$$
2. Soit le tube de courant représenté dans la figure 4, démontere que l'expression du principe de conservation de la masse entre les points 1 et 2 dans le cas d'un fluide incompressible et régime permanent s'écrit sous la forme $S_1V_1 = S_2V_2$?

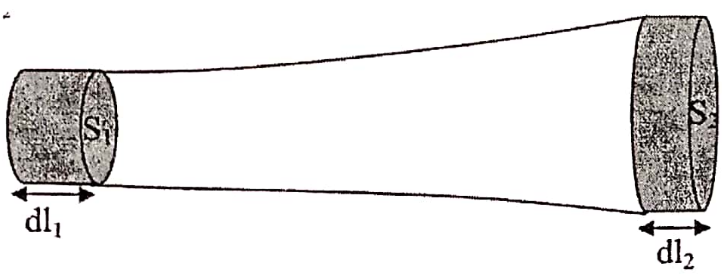

Figure 4

Solution de l'Exercice 1 : [6/6 points]

Corrigé de l'Examen 12 Févr 2022.

Déterminer les hauteurs h_1 et h_2 ?

* Appliquer la Relation Fondamentale de l'Hydrostatique (RFH) entre A et B ; on obtient :

$$P_A + \rho_{H_2O} \cdot g \cdot z_A = cst \quad , \quad P_B + \rho_{H_2O} \cdot g \cdot z_B = cst .$$

$$P_A + \rho_{H_2O} \cdot g \cdot z_A = P_B + \rho_{H_2O} \cdot g \cdot z_B \quad \text{-----} [1] \qquad 0{,}5$$

* Appliquer R.F.H. entre B et C, on obtient :

$$P_B + \rho_{Hg} \cdot g \cdot z_B = P_C + \rho_{Hg} \cdot g \cdot z_C \quad \text{-----} [2] \qquad 0{,}5$$

* Appliquer R.F.H. entre C et D, on obtient :

$$P_C + \rho_{Hg} \cdot g \cdot z_C = P_D + \rho_{Hg} \cdot g \cdot z_D \quad \text{-----} [3] \qquad 0{,}5$$

On somme [1] + [2] + [3], on obtient :

$$P_A + \rho_{H_2O} \cdot g \cdot z_A + \rho_{Hg} \cdot g \cdot z_B + \rho_{Hg} \cdot g \cdot z_C = P_D + \rho_{Hg} \cdot g \cdot z_D + \rho_{Hg} \cdot g \cdot z_C + \rho_{H_2O} \cdot g \cdot z_B \qquad 0{,}5$$

Comme : $P_A = P_D = P_{atm}$ {Les tubes sont ouverts à l'Atmosphère}.

$$\rho_{H_2O} \cdot g \cdot (z_A - z_B) + \rho_{Hg} \cdot g \cdot (z_B - z_C) = \rho_{Hg} \cdot g \cdot (z_D - z_C)$$

$$(z_B - z_C) = \frac{\rho_{Hg} \cdot (z_D - z_C) - \rho_{H_2O} \cdot (z_A - z_B)}{\rho_{Hg}} \qquad 0{,}5$$

AN : $z_B - z_C = \dfrac{13600 \cdot 0{,}08 - 1000 \cdot 0{,}27}{13600} = 0{,}0601\ m$

$$\boxed{h_1 = 6{,}01\ cm} \qquad 0{,}5$$

Pour (h_2) on procède de la même manière :

* Appliquer R.F.H entre F et E ; on obtient.

$$P_F + \rho_{huile} \cdot g \cdot z_F = P_E + \rho_{huile} \cdot g \cdot z_E \quad \dots [4] \quad 0,5$$

* Appliquer R.F.H. entre E et C ; on obtient :

$$P_E + \rho_{Hg} \cdot g \cdot z_E = P_C + \rho_{Hg} \cdot g \cdot z_C \quad \dots [5] \quad 0,5$$

* Appliquer R.F.H. entre C et D ; on obtient :

$$P_C + \rho_{Hg} \cdot g \cdot z_C = P_D + \rho_{Hg} \cdot g \cdot z_D \quad \dots [6] \quad 0,5$$

On somme [4] + [5] + [6] ; on obtient :

$$P_F + \rho_{huile} \cdot g z_F + \rho_{Hg} \cdot g \cdot z_E + \rho_{Hg} \cdot g \cdot z_C = \rho_{huile} \cdot g \cdot z_E + \rho_{Hg} \cdot g \cdot z_C + \rho_{Hg} \cdot g \cdot z_D + P_D$$

Comme : $P_F = P_D = P_{atm}$. 0,5

$$\rho_{huile}(z_F - z_E) = \rho_{Hg} \cdot (z_D - z_C) + \rho_{Hg} \cdot (z_C - z_E).$$

AN :

$$(z_F - z_E) = \frac{\rho_{Hg} \cdot (z_D - z_C) + \rho_{Hg} \cdot (z_C - z_E)}{\rho_{huile}} \quad 0,5$$

$$z_F - z_E = \frac{13600 \cdot \{0,08 - 0,05\}}{780} \quad ; \quad 0,5$$

$$\boxed{h_2 = 0,523\ m = 52,3\ cm}$$

[5/5 Points]

Solution Exercice 2 :

Appliquer la loi de Bernoulli entre 1 et 2 :

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \quad 1$$

avec : $\gamma = \rho_{air} \cdot g$

ou bien : $P_1 + \rho_{air} \cdot \frac{V_1^2}{2} + \rho_{air} \cdot g \cdot z_1 = P_2 + \rho_{air} \cdot \frac{V_2^2}{2} + \rho_{air} \cdot g \cdot z_2$.

Comme le point (1) est un point d'Arrêt, $V_1 = 0$;

et $z_1 = z_2$ (Même hauteur), on obtient :

$$\frac{P_1}{\gamma} = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} \rightarrow P_1 - P_2 = \gamma \cdot \frac{V_2^2}{2g} \quad \text{---} (*)$$

0,5

$$P_1 - P_2 = \rho_{air} \cdot \frac{V_2^2}{2}$$ 0,5

Pour le Manomètre on applique (RFH) entre A et B :

$P_A = P_B$ (Ligne Isobare) 0,5

$$\begin{cases} P_A = P_1 + \rho_{air} \cdot g \cdot (y + 0{,}08) & 0{,}5 \\ P_B = P_2 + \rho_{air} \cdot g \cdot y + \rho_{huile} \cdot g \cdot 0{,}08 & 0{,}5 \end{cases}$$

$$P_1 + \rho_{air} \cdot g \cdot (y + 0{,}08) = P_2 + \rho_{air} \cdot g \cdot y + \rho_{huile} \cdot g \cdot 0{,}08$$

$$P_1 - P_2 = \rho_{huile} \cdot g \cdot 0{,}08 - \rho_{air} \cdot g \cdot 0{,}08$$ 0,5

AN :

$$P_1 - P_2 = 824 \cdot 10 \cdot 0{,}08 - 12 \cdot 0{,}08$$

$$\boxed{P_1 - P_2 = 658{,}24 \ Pa}$$ 0,5

$(*) \rightarrow$

$$V_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot (P_1 - P_2)}{\gamma}} \quad , \quad \text{A.N :}$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 658{,}24}{12}} = 33{,}12 \ \frac{m}{s}$$ 0,5

$$Q_v = S_2 \cdot V_2 = \frac{\pi \cdot d_2^2}{4} \cdot V_2 = \frac{\pi \cdot (0{,}05)^2}{4} \cdot 33{,}12$$ 0,25

$$Q_v = 0{,}065 \ \frac{m^3}{s} \rightarrow \text{en } (l/s) \rightarrow \boxed{Q_v = 65 \ l/s}$$ 0,25

[5/5 points]

Solution exercice 3 :

1) La Vitesse moyenne d'Eclt du Carburant :

Le débit Volumique à travers la Conduite est :

$$Q_V = S \cdot v = \pi R^2 v$$ 0,5

Donc : $v = \frac{Q_v}{S} = \frac{Q_v}{\pi R^2}$; AN : $v = \frac{36/3600}{\pi \cdot (0{,}08)^2} = 0{,}4973 \ m/s$

$$\boxed{v \simeq 0{,}5 \ m/s}$$ 0,5

[3/5

2) La Viscosité dynamique (μ) :

D'après la formule de Poiseuille, la Viscosité Dynamique est :

$$\mu = \frac{P_A - P_B}{l} \cdot \frac{\pi R^4}{8 \cdot Q_v} \quad ; \quad \underline{AN:} \ \mu = \frac{(3-0,4) \cdot 10^5}{2000} \cdot \frac{\pi \cdot (0,08)^4}{8 \cdot \frac{36}{3600}}$$

$\boxed{\mu = 0,2091 \ Pa \cdot s}$ 0,5

0,5

$\boxed{\nu = 2,2978 \cdot 10^{-4} \ \frac{m^2}{s}}$

La Viscosité Cinématique (ν) :

$$\nu = \mu / \rho \quad ; \quad \underline{AN:} \quad \nu = 0,2091/910 = 2,2978 \cdot 10^{-4} \ \frac{m^2}{s}$$

3) Le nombre de Reynolds :

$$R_e = \frac{D \cdot v}{\nu} = \frac{\rho \cdot v \cdot D}{\mu} \quad 0,5 \quad , \quad \underline{AN:} \ R_e = \frac{0,08 \cdot 2 \cdot 0,5}{2,2978 \cdot 10^{-4}}$$

$\boxed{R_e = 248}$ < 2000 {Laminaire} 0,5

On a donc R_e très inférieur à 2000, donc l'Elt dans cette conduite est Laminaire.

4) La puissance ($\mathcal{P}$) est proportionnelle au carré de (v) :

$$\mathcal{P} = Q_v \cdot \Delta P = Q_v \cdot (P_A - P_B) \quad 0,5$$

Avec la différence de pression (Perte de Charge) est donnée par la formule de Poiseuille : $\Delta P = P_A - P_B = \frac{8 \cdot \mu \cdot l \cdot Q_v}{\pi \cdot R^4}$

Donc : $\mathcal{P} = \frac{8 \cdot \mu \cdot l \cdot Q_v}{\pi R^4} \cdot Q_v$ 0,5 , avec : $Q_v = S \cdot v = \pi \cdot R^2 \cdot v$

Soit : $\mathcal{P} = \frac{8 \cdot \mu \cdot l \cdot \pi^2 \cdot R^4 \cdot v^2}{\pi \cdot R^4} = 8 \cdot \mu \cdot \pi \cdot l \cdot v^2$

$\boxed{\mathcal{P} = 8 \cdot \mu \cdot \pi \cdot l \cdot v^2}$ 0,5

Calculer $\mathcal{P}$?

$$\mathcal{P} = 8 \cdot 0,2091 \cdot \pi \cdot 2000 \cdot (0,5)^2 = 2627,62 \ W$$

0,5 $\boxed{\mathcal{P} = 2,627 \ KW}$

4/5

estions de Cours : [4/4 points]

1) Définition d'une ligne de Courant : 1

On appelle ligne de Courant (Stream line) à un instant (t) donné toute ligne qui possède en chacun de ses points une tangente parallèle au Vecteur vitesse $\vec{V}$

Les lignes de courants sont fournies par la relation :

$$d\overrightarrow{OM} \times \vec{V} = \vec{0} \quad (\times : \text{produit vectoriel})$$

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & dy & dz \\ u & v & w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad 0,5$$

$$(dy \cdot w - dz \cdot v)\vec{i} - (dx \cdot w - dz \cdot u)\vec{j} + (dx \cdot v - dy \cdot u)\vec{k} = \langle 0 \quad 0 \quad 0 \rangle \quad 0,5$$

$$\left.\begin{matrix} dy \cdot w - dz \cdot v = 0 \\ dz \cdot u - dx \cdot w = 0 \\ dx \cdot v - dy \cdot u = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \\ \frac{dz}{w} = \frac{dx}{u} \\ \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}} \quad 0,5$$

2) L'Expression du principe de Conservation de la masse se traduit par l'égalité de la masse de fluide par S_1 entre les instants (t) et (t + dt) avec la masse de fluide sortant par S_2 pendant cette même durée, c-à-d : $dm_1 = dm_2$. 0,25

0,25 $\rho_1 \cdot S_1 \cdot dl_1 = \rho_2 \cdot S_2 \cdot dl_2$, on divise sur (dt) :

$$\frac{\rho_1 \cdot S_1 \cdot dl_1}{dt} = \rho_2 \cdot S_2 \cdot \frac{dl_2}{dt} \Leftrightarrow \rho_1 \cdot S_1 \cdot V_1 = \rho_2 \cdot S_2 \cdot V_2 \quad 0,25 \quad 0,25$$

Puisque le fluide est Incompressible, $\rho_1 = \rho_2 = \rho$: on peut simplifier et aboutir à l'équation de continuité suivante : 0,25

1

$$\boxed{S_1 \cdot V_1 = S_2 \cdot V_2} \quad 0,25$$

5/5