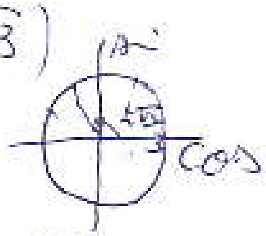
Corrigé de l'examen final Maths 4 (2021)

Exo 1 : (4pts)

1) (2pts) $\log(-1+i\sqrt{3}) = \ln(|-1+i\sqrt{3}|) + i\arg(-1+i\sqrt{3})$ (0,25)

$= \ln 2 + i\cdot\frac{2\pi}{3}$ (0,25)



où : $|-1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$ (0,5)

$-1+i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) : \begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$ (1)

2) (2pts) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n+3^n} z^n$ est sous la forme canonique $\Rightarrow a_n = \frac{1}{2^n+3^n}$

d'où :

$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)}{3^n\left(2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n+3\right)} = \frac{1}{3}$ (0,25) (0,5) (0,5) (0,25)

$\Rightarrow R = 3$ (0,25)

Exo 2 (6pts)

1) (1,5pt) $P(x,y) = (e^y - e^{-y})\cos x$

$\frac{\partial P}{\partial x} = -(e^y - e^{-y})\sin x$ (0,5) et $\frac{\partial P}{\partial y} = (e^y + e^{-y})\cos x$ (0,5)

$\Rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -(e^y - e^{-y})\cos x$ $\quad \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = (e^y - e^{-y})\cos x$

$\Rightarrow \Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$ (0,25) $\Rightarrow P$ harmonique (0,25) $\Rightarrow \exists Q$ tq : $f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$ est holomorphe.

2) (3pts) f holomorphe $\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}$ (0,5) $\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial y} = -(e^y - e^{-y})\sin x$ (1)

(0,5) $\frac{\partial Q}{\partial x} = -(e^y + e^{-y})\cos x$ (2)

(1) $\Rightarrow Q(x,y) = \int\left[-(e^y - e^{-y})\sin x\right]\partial y$

$\Rightarrow Q(x,y) = -(e^y + e^{-y})\sin x + k(x)$ (0,5)

k : ft qlq de x.

remplaçant dans ②, on trouve

$\frac{\partial Q}{\partial x} = -(e^y + e^{-y})\cos x + k'(x) = -(e^y + e^{-y})\cos x$ 0,5 0,25

$\Rightarrow k'(x) = 0 \Rightarrow k = cte$ 0,25 0,25

On conclut: $f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$

$= (e^y - e^{-y})\cos x + i\left[-(e^y + e^{-y})\sin x + cte\right]$ 0,25 0,5

③ 1,5pt On pose $y = 0$, $cte = 0 \Rightarrow f(x+i0) = i(-2\sin x)$ 0,5

d'où $f(z) = -2i\sin z$ 0,5

EXO 3 10pts ① 3pts $C = \{\gamma(t) \in \mathbb{C} : \gamma(t) = 2e^{it},\ t \in [0, 2\pi]\}$ 0,5

On pose $z = \gamma(t) \Rightarrow dz = \gamma'(t)dt = 2i\, e^{it} dt$ 0,25 0,5

Ainsi on aura: $\int_C \frac{z^2+1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{(2e^{it})^2 + 1}{2e^{it}} \cdot 2i\, e^{it} dt$ 0,5

$= i\int_0^{2\pi} (4e^{2it} + 1) dt = i\left[4 \cdot \frac{1}{2i} e^{2it} + t\right]_{t=0}^{t=2\pi} = i\left[\frac{2}{i}(e^{4\pi i} - e^0) + (2\pi - 0)\right]$ 0,25 0,25 0,5

$= 2\pi i$ 0,25

② 2.1 3,5pts $z = -1$ et $z = 2$ sont deux pôles simples 0,25

$Res(f, -1) = \lim_{z\to -1} (z+1) f(z) = \lim_{z\to -1} \frac{2z}{z-2} = \frac{2}{3}$ 0,5 0,5

$Res(f, 2) = \lim_{z\to 2} (z-2) f(z) = \lim_{z\to 2} \frac{2z}{z+1} = \frac{4}{3}$ 0,5 0,5 0,5

Ainsi d'après le Th des résidus:

$\oint_C f(z) dz = 2\pi i\,(Res(f,-1) + Res(f,-2)) = 2\pi i\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3}\right) = 4\pi i$ 0,25 0,5 0,25

2.2 3,5pts On a: $\oint_C f(z)dz = \frac{2}{3}\oint_C \frac{1}{z+1} dz + \frac{4}{3}\oint_C \frac{1}{z-2} dz$

la fonction $g(z) = 1$ est holomorphe sur C et à l'intérieur de C et on a: $w_1 = -1$ (à l'intérieur de C) C fermé et simple 0,25 0,25 0,25

d'après la formule intégrale de Cauchy:

$\oint_C \frac{1}{z+1} dz = 2\pi i\, g(-1) = 2\pi i(1) = 2\pi i$ 0,5 0,25 0,25

$w_2 = 2$ (à l'intérieur de C) $\Rightarrow \oint_C \frac{1}{z-2} dz = 2\pi i\, g(2) = 2\pi i$ 0,25 0,5 0,5

On aura: $\oint f(z)dz = \frac{2}{3}(2\pi i) + \frac{4}{3}(2\pi i) = 4\pi i$ 0,25 0,25

Université 8 Mai 45 Guelma — Faculté ST

Deuxième année ST — Année Universitaire : 2020/2021

Examen final de Maths 4 (16/06/2021)

Durée 01h:30 mn

Exercice 1 (2+2=04 points)

1) Calculer

$$\log(-1+i\sqrt{3})$$

2) Déterminer le rayon de convergence de la série entière suivante :

$$\sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{1}{2^n+3^n} z^n.$$

Exercice 2 (1.5+4.5=06 points)

1) Montrer qu'il existe une fonction f holomorphe dont sa partie réelle est

$$P(x, y) = (e^y - e^{-y}) \cos x.$$

2) Déterminer f puis écrire f en termes de z.

Exercice 3 (3+3.5+3.5=10 points)

1) Calculer l'intégrale

$$\int_C \frac{z^2+1}{z} dz$$

où C est le cercle de centre 0 et de rayon 2.

2) Soit la fonction

$$f(z) = \frac{2z}{(z+1)(z-2)}$$

Soit C le cercle de centre 0 et de rayon 3.

a) Calculer les résidus de f puis en déduire $\int_C f(z) dz$

b) Sachant que $f(z) = \frac{2}{3}\frac{1}{z+1} + \frac{4}{3}\frac{1}{z-2}$

Calculer $\int_C f(z) dz$ à l'aide de la formule intégrale de Cauchy.

Université 8 Mai 45 Guelma — Faculté ST

Deuxième année ST — Année Universitaire : 2020/2021

Examen final de Maths 4 (16/06/2021)
Durée 01h:30 mn

Exercice 1 (2+2=04 points)

1) Calculer

$$\log(-1+i\sqrt{3})$$

2) Déterminer le rayon de convergence de la série entière suivante :

$$\sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{1}{2^n+3^n} z^n.$$

Exercice 2 (1.5+4.5=06 points)

1) Montrer qu'il existe une fonction f holomorphe dont sa partie réelle est

$$P(x,y) = (e^y - e^{-y}) \cos x.$$

2) Déterminer f puis écrire f en termes de z.

Exercice 3 (3+3.5+3.5=10 points)

1) Calculer l'intégrale

$$\int_C \frac{z^2+1}{z} dz$$

où C est le cercle de centre 0 et de rayon 2.

2) Soit la fonction

$$f(z) = \frac{2z}{(z+1)(z-2)}$$

Soit C le cercle de centre 0 et de rayon 3.

a) Calculer les résidus de f puis en déduire $\int_C f(z)dz$

b) Sachant que $f(z) = \frac{2}{3}\frac{1}{z+1} + \frac{4}{3}\frac{1}{z-2}$

Calculer $\int_C f(z)dz$ à l'aide de la formule intégrale de Cauchy.