Université 8 Mai 45 Guelma — Faculté ST
Deuxième année ST — Année Universitaire : 2021/2022

Examen final de Maths 4 (7/06/2022)
Durée 01h:30 mn

Exercice 1 (2+2=04 points) (aussi micro-interrogation)
1) Simplifier le nombre complexe suivant :

$$(1-i)^{(1+i)}$$

2) Déterminer le rayon de convergence de la série entière suivante :

$$\sum_{n=0}^{n=+\infty} (-1)^n \frac{z^n}{(2n+1)!}$$

Exercice 2 (4.5+1.5=06 points)

1) Montrer qu'il existe une fonction f holomorphe dont sa partie réelle est

$$P(x,y) = \frac{3}{2}x^2 + 2xy - \frac{3}{2}y^2.$$

2) Déterminer f puis écrire f en termes de z.

Exercice 3 (4+3+3=10 points)
1) Calculer l'intégrale suivante

$$\int_C (z^3 - z)dz$$

le long du segment de droite joignant $z_0 = 0$ et $z_1 = i$.

2) Calculer l'intégrale suivante

$$\int_C f(z)dz = \int_C \frac{\cos \pi z}{(z+i)^2} dz$$

où C est le cercle de centre 0 et de rayon 2, en appliquant :
a) La formule intégrale de Cauchy
b) Le théorème des résidus

Corrigé de l'Examen final Maths L1 (2022)

Ex n°1

1) 2pts

$(1-i)^{(1+i)} = e^{\log(1-i)^{(1+i)}} = e^{(1+i)[\ln|1-i| + i\arg(1-i)]}$ 0,5 0,5

$= e^{(1+i)[\ln\sqrt{2} + i(-\frac{\pi}{4}+2k\pi)]} = e^{\ln\sqrt{2} - (-\frac{\pi}{4}+2k\pi) + i(\ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi)}$ 0,5 0,5

$= e^{\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-2k\pi} \cdot \left[\cos(\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}) + i\sin(\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4})\right].$

2) 2pts

$a_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$ d'après la règle de D'Alembert, on a :

$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!}\,\frac{(2n+1)!}{(-1)^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(2n+3)(2n+2)} = 0$ 0,5 0,5 0,5

$\Rightarrow R = +\infty$ d'où $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}Z^n$ converge sur $\mathbb{C}$. 0,25 0,25

EXO n°2

1) 4,5pts

$\frac{\partial P}{\partial x} = 3x+2y \Rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 3$ et $\frac{\partial P}{\partial y} = -3y+2x \Rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -3$ 0,25 0,25 0,25 0,25

$\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 3-3 = 0 \Rightarrow P$ harmonique $\Rightarrow \exists f$ holomorphe 0,25

tq: $f = P + iQ$: $\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial y} = 3x+2y \;\ldots (1) \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 3y-2x \;\ldots (2) \end{array}$ 0,5 0,5

De (1): $Q(x,y) = \int(3x+2y)\,\partial y = 3xy + y^2 + k(x)$: k ft qlq de x 0,5

de (2) : $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(3xy + y^2 + k(x)) = 3y - 2x$

$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 3y + k'(x) = 3y - 2x \Rightarrow k'(x) = -2x$ 0,5 0,5

$\Rightarrow k(x) = -x^2 + cte$ d'où : $Q(x,y) = 3xy + y^2 - x^2 + cte.$ 0,25 0,25

$f(Z) = \frac{3}{2}x^2 + 2xy - \frac{3}{2}y^2 + i[3xy + y^2 - x^2 + cte]$ 0,25

2) 1,5pt

On pose : $y = 0$ et $cte = 0$ 0,25

$f(x) = \frac{3}{2}x^2 + i[-x^2] \Rightarrow f(Z) = \frac{3}{2}Z^2 - iZ^2 = (\frac{3}{2} - i)Z^2.$ 0,25 0,5

$$C = \{ \gamma(t) \in \mathbb{C} : \gamma(t) = z_0 + (z_1 - z_0)t \ , \ t \in [0,1] \}$$

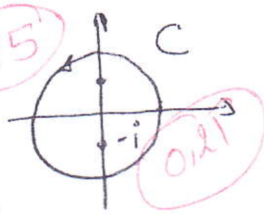
$$= \{ 0 + (i - 0)t \ , \ t \in [0,1] \} \Rightarrow \gamma(t) = it .$$

On pose $z = it \Rightarrow dz = i\,dt$.

Ainsi on aura : $\displaystyle\int_C (z^3 - z)\,dz = \int_0^1 ((it)^3 - it)\,i\,dt$

$$= \int_0^1 (t^3 + t)\,dt = \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^2 \Big/_0^1 = \frac{3}{4}.$$

2) 2.1) • la fonction $f(z) = \cos(\pi z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ ($\cos$ et $\pi z \in \mathcal{C}^\infty$) donc sur C.



• $w = -i$ est un point à l'interieur de C.

• C fermé et simple

d'après la formule intégrale de Cauchy :

$$f'(w) = \frac{1!}{2\pi i} \oint_C \frac{\cos \pi z}{(z+i)^2}\,dz \Rightarrow I = 2\pi i\, f'(-i)$$

$$= 2\pi i \cdot -\pi \sin(-\pi i)$$

$$= -2\pi^2 i \sin(-\pi i)$$

2.2) 3pts $z = -i$ est un pôle double.

$$\operatorname{Re}(f, -i) = \lim_{z \to -i} \left[(z+i)^2 \cdot f(z) \right]' = \lim_{z \to -i} \left[(z+i)^2 \cdot \frac{\cos \pi z}{(z+i)^2} \right]'$$

$$= \lim_{z \to -i} \left[\cos \pi z \right]' = \lim_{z \to -i} -\pi \sin \pi z = -\pi \sin(-i\pi$$

Ainsi d'après le Théorème des résidu

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -i) = 2\pi i (-\pi \sin(-i\pi))$$

$$= -2\pi^2 i \sin(-\pi i)$$