University 8 May 1945, Guelma — Faculty of Science and Technology
2nd ST Engineer — Sciences & Technologies
Numerical Analysis 2 — Final Exam — May 2026 — 2h

Avec : $f(x,y) = y^2$

3) Résultats des calculs (Les solutions approchées) .

i	x_i	y_i
0	0.0	1.0000
1	0.1	1.0050
2	0.2	1.0201
3	0.3	1.0459
4	0.4	1.0832
5	0.5	1.1330

Question de cours

Démontrer que la formule de la dérivée seconde par le développement de Taylor soit : (2Pt)

$$f''(x) \approx [f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)] / h^2$$

Exercice 1

Soit, P(x) est le polynôme d'interpolation de Newton de la fonction, $f(x) = e^{(x-4)}$ associé aux points d'interpolation suivants : $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4$.

1) Ecrire l'expression de polynôme d'interpolation de Newton en différences divisées ? **(Pt.1)**
2) Calculer les valeurs de différences divisées de Polynôme ? **(Pts.2)**
3) Trouver l'expression de polynôme d'interpolation ? **(Pts.2)**
4) Calculer P(1.5) , P(4.5) et les valeurs exactes ? **(Pts.2)**
5) Calculer l'erreur maximale commise et l'erreur admissible ? **(Pts.2)**
6) Est-ce que cette interpolation est admissible ? **(Pt.1)**

Exercice 2

Soit, l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\pi} \cos(x^2 - 1)dx$$

1) Calculer la valeur approchée de l'intégrale I(f) par la méthode des Trapèzes, pour n = 3 ? **(Pts.2)**
2) Calculer l'erreur commise admissible ? **(Pts.2)**

Exercice 3

On considère le problème de Cauchy suivant : **(Pts.4)**

$$dy / dx = xy$$

Avec, $y(x_0) = 1$

Résoudre numériquement ce problème sur l'intervalle [0 0.5] pour que n = 5, en utilisant la formule de la méthode d'Eleur améliorer, suivante :

$$y_{i+1} = y_i + hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}f(x_i, y_i)\right)$$

Solution

Remarque : prendre 4 chiffres après la virgule pour tous les Exercices

La Clarté, la précision et la présentation des réponses sont des éléments importants d'appréciation

Question de cours

Demonstrate the second derivative formula using Taylor's development is : **(2Pt)**

$$f''(x) \approx [f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)] / h^2$$

Exercise 1

Let P(x) be the Newton interpolation polynomial of the function. $f(x) = e^{(x/4)}$ associated with the following interpolation points: $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4$.

1) Write the expression for Newton's interpolation polynomial in divided differences ? **(Pt.1)**
2) Calculate the divided differences values of the polynomial ? **(Pts.2)**
3) Trouver l'expression de polynôme d'interpolation ? **(Pts.2)**
4) Calculate P(1.5), P(4.5) and the exact values ? **(Pts.2)**
5) Calculate the maximum error committed and the permissible error ? **(Pts.2)**
6) Is this interpolation permissible ? **(Pt.1)**

Exercise 2

- Let the following integral :

$$I = \int_0^{\pi} \cos(x^2 - 1)\,dx$$

1) Calculate the approximate value of the integral I(f) using the Trapezoidal Method, for n = 3 ? **(Pts.2)**
2) Calculate the permissible error ? **(Pts.2)**

Exercise 3

We consider the following Cauchy problem : **(Pts.4)**

$$dy / dx = xy$$

With, $y(x_0) = 1$

Solve this problem numerically over the interval [0, 0.5] for n = 5, using the following improved formula of the Euler's method :

$$y_{i+1} = y_i + hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)\right)$$

Solution

Note: use 4 decimal places for all exercises.

Clarity, precision, and presentation of answers are important criteria for assessment.

Question de cours (2Pts)

Démontrer que la formule de la dérivée seconde de Taylor soit : (**2Pt**)

$f''(x) \approx [f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)] / h^2$

Démonstration de la formule de la dérivée seconde par Taylor

On veut démontrer la formule :

$f''(x) \approx [f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)] / h^2$

1) Développement de Taylor de f(x+h)

$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + (h^2/2)f''(x) + (h^3/6)f'''(x) + (h^4/24)f''''(x) + O(h^5)$

2) Développement de Taylor de f(x-h)

$f(x-h) = f(x) - h f'(x) + (h^2/2)f''(x) - (h^3/6)f'''(x) + (h^4/24)f''''(x) + O(h^5)$

3) Addition des deux développements

En additionnant les deux expressions, les termes en $f'(x)$ et $f'''(x)$ s'annulent.

$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + (h^4/12)f''''(x) + O(h^5)$

4) Isolation de f''(x)

$f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) = h^2 f''(x) + O(h^4)$

5) Division par h^2

$f''(x) \approx [f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)] / h^2$

La formule centrée de la dérivée seconde est obtenue à partir des développements de Taylor. L'erreur est de l'ordre $O(h^2)$.

Solution d'Exercice 1

1) Ecrire l'expression de polynôme d'interpolation de Newton en différences divisées ? (**Pt.1**)

On a les points : $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4$.

Alors le polynôme d'interpolation de Newton d'ordre 3 s'écrit :

$$P_3(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$
$$+ f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

En remplaçant les valeurs des x_i :

$$P_3(x) = f[1] + f[1,2](x-1) + f[1,2,3](x-1)(x-2) + f[1,2,3,4](x-1)(x-2)(x-3)$$

2) Calculer les valeurs de différences divisées de Polynôme ? (**Pts.2**)

Première différences divisées — Deuxième différences divisées — Troisième différences divisées

$$f[1,2] = \frac{f(2)-f(1)}{2-1}$$

$$f[2,3] = \frac{f(3)-f(2)}{3-2} \qquad f[1,2,3] = \frac{f[2,3]-f[1,2]}{3-1}$$

$$f[3,4] = \frac{f(4)-f(3)}{4-3} \qquad f[2,3,4] = \frac{f[3,4]-f[2,3]}{4-2} \qquad f[1,2,3,4] = \frac{f[2,3,4]-f[1,2,3]}{4-1}$$

Alors ;

$$f[1,2] = 1.6487 - 1.2840 \approx 0.3647 \qquad f[2,3] = 2.1170 - 1.6487 \approx 0.4683$$

$$f[3,4] = 2.7183 - 2.1170 \approx 0.6013$$

$f[1,2,3] = \frac{0.4683 - 0.3647}{2} \approx 0.0518$ $\quad f[2,3,4] = \frac{0.6013 - 0.4683}{2} \approx 0.0665$

$f[1,2,3,4] = \frac{0.0665 - 0.0518}{3} \approx 0.0049$

Avec,

$f(1) = e^{1/4} \approx 1.2840$ $\quad f(3) = e^{3/4} \approx 2.1170$

$f(2) = e^{1/2} \approx 1.6487$ $\quad f(4) = e \approx 2.7183$

3) Trouver l'expression de polynôme d'interpolation ?

On utilise la formule de Newton :

$P_3(x) = f[1] + f[1,2](x-1) + f[1,2,3](x-1)(x-2) + f[1,2,3,4](x-1)(x-2)(x-3)$

En remplaçant :

$$P_3(x) \approx 1.2840 + 0.3647(x-1) + 0.0518(x-1)(x-2) + 0.0049(x-1)(x-2)(x-3)$$

Après développement :

$$P_3(x) \approx 0.0049x^3 + 0.0224x^2 + 0.2178x + 1.0089$$

4) Calculer P(1.5) , P(4.5) et les valeurs exactes ?

$$P(1.5) \approx 0.0049(1.5)^3 + 0.0224(1.5)^2 + 0.2478(1.5) + 1.0089 \approx 1.4552$$

Valeur exacte :

$$f(1.5) = e^{1.5/4} = e^{0.375} \approx 1.4549$$

Pour, x = 4.5 , on ne peut pas calculer P(4.5) car x = 4.5 ne appartient pas au intervalle [1 4].

5) Calculer l'erreur maximale commise et l'erreur admissible ? (**Pts.2**)

L'erreur absolue est donnée par :

$$E(x) = f(x) - P(x)$$

$$E(1.5) = |1.4550 - 1.4549| = 0.0002$$

5) Calculer l'erreur admissible de la méthode Newton dans ce cas en détail ?

Formule de l'erreur de Newton

$$E_n(x) \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)|$$

$M_{n+1} = \max_{x\in[a\ b]}|f^{(n+1)}(x)|$

Donc,

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

Dérivées successives :

$f'(x) = \frac{1}{4}e^{x/4}$ $\quad f^{(3)}(x) = \frac{1}{64}e^{x/4}$

$f''(x) = \frac{1}{16}e^{x/4}$ $\quad f^{(4)}(x) = \frac{1}{256}e^{x/4}$

Sur l'intervalle [1 4], la fonction exponentielle est croissante. Donc le maximum est atteint en x=4 .

$$M = \max_{x\in[1,4]} |f^{(4)}(x)| = \frac{1}{256}e \approx 0.0106$$

Pour x=1.5

$$|R_3(1.5)| \leq \frac{M}{24}(1.5-1)(1.5-2)(1.5-3)(1.5-4)$$

Ainsi ,

$$|R_3(1.5)| \leq 0.0004$$

6) Est-ce que cette interpolation est admissible ? (Pt.1)
Donc, cette interpolation Très bonne approximation. car 0,0004 < 0,0002

Solution d'Exercice 2

Méthode des trapèzes – Calcul approché d'une intégrale,

Calculer une valeur approchée de **I(f)** par la méthode des trapèzes avec n = 3.

- Calcul du pas h

h = (b − a) / n = (π − 0) / 3 = π / 3

2) Les points xi

$x_0 = 0$ $x_1 = \pi / 3$ $x_2 = 2\pi / 3$ $x_3 = \pi$

3) Valeurs de $f(x) = \cos(x^2 - 1)$

$f(x_0) = \cos(-1) \approx 0.5403$ $f(x_1) = \cos((\pi/3)^2 - 1) \approx 0.9953$

$f(x_2) = \cos((2\pi/3)^2 - 1) \approx -0.9700$ $f(x_3) = \cos(\pi^2 - 1) \approx -0.8485$

4) Formule des trapèzes

$I_3 = (h/2)\,[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + f(x_3)]$

$I_3 = (\pi/6)\,[0.5403 + 2(0.9953) + 2(-0.9700) - 0.8485] \approx -0.135$

2) Calculer l'erreur commise admissible ?

On utilise **de la méthode des trapèzes composée** :

$$|E_T| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{a,b} |f''(x)|$$

Dérivée seconde

$$f''(x) = -2\sin(x^2-1) - 4x^2\cos(x^2-1)$$

Comme : $|\sin| \leq 1$ et $|\cos| \leq 1$

Alors : $|f''(x)| \leq 2 + 4x^2$

Sur [0, π] le maximum est atteint en x= π : $M_2 = 2 + 4\pi^2$

Erreur admissible :

$$|E_T| \leq \frac{\pi^3}{12\cdot 3^2}(2+4\pi^2) = \frac{\pi^4}{108}(2+4\pi^2)$$

Donc : $|E_T| \leq 11.9$

Solution d'Exercice 3

Résolution numérique par la méthode d'Euler améliorée, Problème de Cauchy :

dy/dx = xy , avec y(0)=1 , Intervalle [0 ; 0.5], n = 5

1) Calcul du pas

h = (b - a)/n = (0.5 - 0)/5 = 0.1

2) Formule de la méthode d'Euler améliorée : $y_{i+1} = y_i + hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}f(x_i, y_i)\right)$