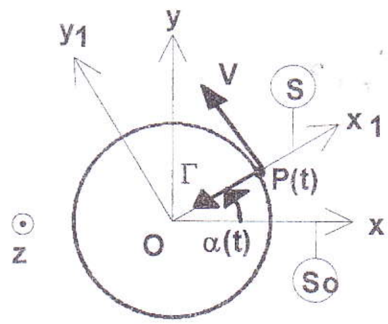
$2^{ème}$ année S & T	MECANIQUE RATIONNELLE	Mardi 25 janvier 2022
S. B. MEMD 2201	EPREUVE D'EXAMEN	Durée : de 10h30 à 12h

AUCUN DOCUMENT N'EST AUTORISE. LES TELEPHONES et SMARTPHONES DOIVENT ETRE ETEINTS.
TOUTE COMMUNICATION EST SANCTIONNEE PAR UN ZERO.

Epreuve de courte durée (**micro-interrogation**)



Soit $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère lié à un bati (S_0). Le solide (S) a avec (S_0) une liaison pivot d'axe $(O,\vec{z})$. Soit $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z})$ un repère lié à (S).

Posons $\alpha(t)=(\vec{x},\vec{x}_1)$ et supposons $\alpha(t)$ de la forme : :

$\alpha(t)=\omega t$ (ω constante positive en rd/s)

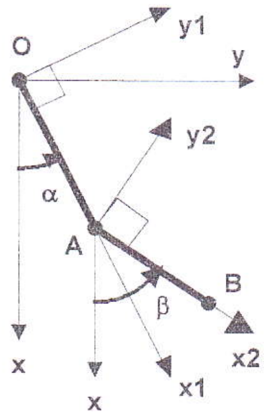
$P(t)$ est un point de (S) tel que : $\overrightarrow{OP}=a\vec{x}_1$ (a constante positive).

Déterminer :

1°) le vecteur vitesse du point P / repère R : $\vec{V}(P/R)$.

2°) le vecteur accélération du point P / repère R : $\vec{\Gamma}(P/R)$.

Epreuve d'**examen**



EXERCICE 1 : **10pts**

Un pendule double est constitué de deux tiges OA et AB. La tige OA est en liaison pivot d'axe $(O,\vec{z})$ avec le bâti. La tige AB est en liaison pivot d'axe $(A,\vec{z})$ avec la tige OA.

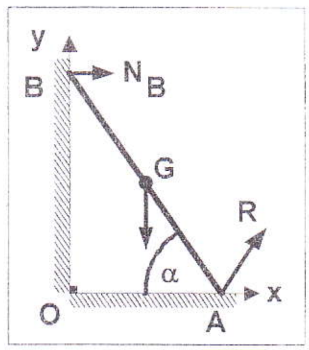
Soient trois repères $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ lié au bâti, $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z})$ lié à la tige OA et $R_2(A,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z})$ lié à la tige AB, tels que : $\overrightarrow{OA}=a\vec{x}_1$ ($a\rangle 0$), $\overrightarrow{AB}=b\vec{x}_2$ ($b\rangle 0$), $\alpha=(\vec{x},\vec{x}_1)$, $\beta=(\vec{x},\vec{x}_2)$.

Déterminer :

1°) Les vecteurs vitesses du point B : $\vec{V}(B/R)$, $\vec{V}(B/R_1)$, $\vec{V}(B\in R_1/R)$.

2°) Les vecteurs accélérations du point B : $\vec{\Gamma}(B/R)$, $\vec{\Gamma}(B/R_1)$, $\vec{\Gamma}(B\in R_1/R)$.

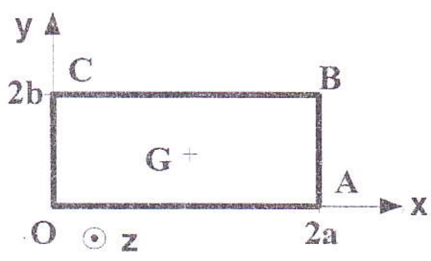
EXERCICE 2 : **10pts**



Une échelle de masse M et de centre de gravité G situé en son milieu repose sur le sol horizontal et s'appuie contre un mur vertical . Le coefficient de frottement sur le sol est f , il est nul sur le mur. On désigne par α l'inclinaison de l'échelle sur le sol. Un homme de masse m est immobile sur l'échelle, son centre de gravité G' est supposé sur l'échelle.

Déterminer les réactions du mur et du sol sur l'échelle.

EXERCICE 3 : **libre**



On considère une plaque rectangulaire homogène de masse **m**, de centre d'inertie **G**, de longueur **2a** et de largeur **2b**.

Déterminer la matrice d'inertie suivante :

au point **G**, relativement à la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

$$\vec{V}(B/R)=\left[\frac{d}{dt}\overline{OB}\right]_R=\left[\frac{d}{dt}\overline{OA}\right]_R+\left[\frac{d}{dt}\overline{AB}\right]_R=a\left[\frac{d}{dt}\vec{x}_1\right]_R+b\left[\frac{d}{dt}\vec{x}_2\right]_R$$

$$\vec{V}(B/R)=a\left\{\left[\frac{d}{dt}\vec{x}_1\right]_{R_1}+\vec{\Omega}(R_1/R)\wedge\vec{x}_1\right\}+b\left\{\left[\frac{d}{dt}\vec{x}_2\right]_{R_2}+\vec{\Omega}(R_2/R)\wedge\vec{x}_2\right\}$$

Le repère R_1 est déduit du repère R par une rotation α autour de $\vec{z}$ d'où : $\vec{\Omega}(R_1/R)=\alpha'\vec{z}$

Le repère R_2 est déduit du repère R par une rotation β autour de $\vec{z}$ d'où : $\vec{\Omega}(R_2/R)=\beta'\vec{z}$

$$\vec{V}(B/R)=a\left\{\vec{0}+\alpha'\vec{z}\wedge\vec{x}_1\right\}+b\left\{\vec{0}+\beta'\vec{z}\wedge\vec{x}_2\right\}=a\alpha'\vec{y}_1+b\beta'\vec{y}_2$$ 2.

Autre méthode : utilisation de la relation entre 2 points d'un même solide
A et O appartiennent à la tige OA liée à R_1, A et B appartiennent à la tige AB liée à R_2 :

$$\vec{V}(B/R)=\vec{V}(A/R)+\vec{\Omega}(R_2/R)\wedge\overline{AB}=\vec{V}(A/R)+\beta'\vec{z}\wedge b\vec{x}_2=\vec{V}(A/R)+b\beta'\vec{y}_2$$

$$\vec{V}(A/R)=\vec{V}(O/R)+\vec{\Omega}(R_1/R)\wedge\overline{OA}=\vec{0}+\alpha'\vec{z}\wedge a\vec{x}_1=a\alpha'\vec{y}_1$$

$$\vec{V}(B/R)=a\alpha'\vec{y}_1+b\beta'\vec{y}_2$$

$$\vec{V}(B/R_1)=\left[\frac{d}{dt}\overline{OB}\right]_{R_1}=a\left[\frac{d}{dt}\vec{x}_1\right]_{R_1}+b\left[\frac{d}{dt}\vec{x}_2\right]_{R_1}=\vec{0}+b\left\{\left[\frac{d}{dt}\vec{x}_2\right]_{R_2}+\vec{\Omega}(R_2/R_1)\wedge\vec{x}_2\right\}$$

Le repère R_2 est déduit du repère R_1 par une rotation $(\beta-\alpha)$ autour de $\vec{z}$ d'où : $\vec{\Omega}(R_2/R)=(\beta'-\alpha')\vec{z}$

$$\vec{V}(B/R_1)==b\left\{\vec{0}+(\beta'-\alpha')\vec{z}\wedge\vec{x}_2\right\}=b(\beta'-\alpha')\vec{y}_2$$

Ou bien :

$$\vec{V}(B/R_1)=\vec{V}(A/R_1)+\vec{\Omega}(R_2/R_1)\wedge\overline{AB}=\vec{0}+(\beta'-\alpha')\vec{z}\wedge b\vec{x}_2=b(\beta'-\alpha')\vec{y}_2$$ 2.

Pour calculer $\vec{V}(B\in R_1/R)$ il ne faut pas dériver mais utiliser un $2^{ème}$ point qui appartient sans aucune anbiguïté au repère R_1, par exemple le point A :

$$\vec{V}(B\in R_1/R)=\vec{V}(A/R)+\vec{\Omega}(R_1/R)\wedge\overline{AB}=a\alpha'\vec{y}_1+\alpha'\vec{z}\wedge b\vec{x}_2=a\alpha'\vec{y}_1+b\alpha'\vec{y}_2$$ 2

$$\vec{\Gamma}(B/R)=\left[\frac{d}{dt}\vec{V}(B/R)\right]_R=a\left[\frac{d}{dt}\alpha'\vec{y}_1\right]_R+b\left[\frac{d}{dt}\beta'\vec{y}_2\right]_R$$

$$\vec{\Gamma}(B/R)=a\left\{\left[\frac{d}{dt}\alpha'\right]_R\vec{y}_1+\alpha'\left[\frac{d}{dt}\vec{y}_1\right]_R\right\}+b\left\{\left[\frac{d}{dt}\beta'\right]_R\vec{y}_2+\beta'\left[\frac{d}{dt}\vec{y}_2\right]_R\right\}$$

$$\vec{\Gamma}(B/R)=a\left\{\alpha''\vec{y}_1+\alpha'\left(\left[\frac{d}{dt}\vec{y}_1\right]_{R_1}+\vec{\Omega}(R_1/R)\wedge\vec{y}_1\right)\right\}+b\left\{\beta''\vec{y}_2+\beta'\left(\left[\frac{d}{dt}\vec{y}_2\right]_{R_2}+\vec{\Omega}(R_2/R)\wedge\vec{y}_2\right)\right\}$$

$$\vec{\Gamma}(B/R)=a\left\{\alpha''\vec{y}_1+\alpha'\left(\vec{0}+\alpha'\vec{z}\wedge\vec{y}_1\right)\right\}+b\left\{\beta''\vec{y}_2+\beta'\left(\vec{0}+\beta'\vec{z}\wedge\vec{y}_2\right)\right\}$$

$$\vec{\Gamma}(B/R)=a\left\{\alpha''\vec{y}_1+\alpha'(-\alpha'\vec{x}_1)\right\}+b\left\{\beta''\vec{y}_2+\beta'(-\beta'\vec{x}_2)\right\}$$

$$\vec{\Gamma}(B/R)=a\left(\alpha''\vec{y}_1-\alpha'^2\vec{x}_1\right)+b\left(\beta''\vec{y}_2-\beta'^2\vec{x}_2\right)$$ 1,5

$$\vec{\Gamma}(B/R_1)=\left[\frac{d}{dt}\vec{V}(B/R_1)\right]_{R_1}=\left[\frac{d}{dt}b(\beta'-\alpha')\vec{y}_2\right]_{R_1}=b\left[\frac{d}{dt}(\beta'-\alpha')\right]_{R_1}\vec{y}_2+b(\beta'-\alpha')\left[\frac{d}{dt}\vec{y}_2\right]_{R_1}$$

$$\vec{\Gamma}(B/R_1)=b(\beta''-\alpha'')\vec{y}_2+b(\beta'-\alpha')\left\{\left[\frac{d}{dt}\vec{y}_2\right]_{R_2}+\Omega(R_2/R_1)\wedge\vec{y}_2\right\}$$ 1,5

$$\vec{\Gamma}(B/R_1)=b(\beta''-\alpha'')\vec{y}_2+b(\beta'-\alpha')\{(\beta'-\alpha')\vec{z}\wedge\vec{y}_2\}=b(\beta''-\alpha'')\vec{y}_2-b(\beta'-\alpha')^2\,\vec{x}_2$$

$$\vec{\Gamma}(B\in R_1/R)=\vec{\Gamma}(A/R)+\left[\frac{d}{dt}\vec{\Omega}(R_1/R)\right]_R\wedge\overrightarrow{AB}+\vec{\Omega}(R_1/R)\wedge\left[\vec{\Omega}(R_1/R)\wedge\overrightarrow{AB}\right]$$

$$\vec{\Gamma}(A/R)=\left[\frac{d}{dt}\vec{V}(A/R)\right]_R=\left[\frac{d}{dt}\left(\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OA}\right]_R\right)\right]_R=\left[\frac{d}{dt}\left(\left[\frac{d}{dt}a\vec{x}_1\right]_R\right)\right]_R=a\left[\frac{d}{dt}(\alpha'\vec{y}_1)\right]_R$$

$$\vec{\Gamma}(A/R)=a\left[\frac{d}{dt}(\alpha'\vec{y}_1)\right]_R=a\left[\alpha''\vec{y}_1-\alpha'^2\,\vec{x}_1\right]$$

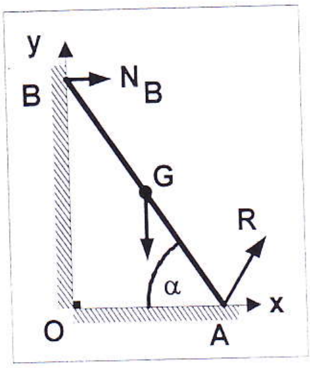
$$\vec{\Gamma}(B\in R_1/R)=a\left[\alpha''\vec{y}_1-\alpha'^2\,\vec{x}_1\right]+\left[\frac{d}{dt}\alpha'\vec{z}\right]_R\wedge b\vec{x}_2+\alpha'\vec{z}\wedge\left[\alpha'\vec{z}\wedge b\vec{x}_2\right]$$ 1.

$$\vec{\Gamma}(B\in R_1/R)=a\left[\alpha''\vec{y}_1-\alpha'^2\,\vec{x}_1\right]+b\alpha''\vec{y}_2-b\alpha'^2\,\vec{x}_2$$

EXERCICE 2 : **10pts** TD Statique

Une échelle de masse M et de centre de gravité G situé en son milieu repose sur le sol horizontal et s'appuie contre un mur vertical . Le coefficient de frottement sur le sol est f , il est nul sur le mur. On désigne par α l'inclinaison de l'échelle sur le sol. Un homme de masse m est immobile sur l'échelle, son centre de gravité G' est supposé sur l'échelle.

Déterminer les réactions du mur et du sol sur l'échelle.



Solution :

AB=l ; E : échelle ; H : homme

1° équilibre de l'échelle : $\tau\{\bar{E}\to E\}=\{0\}$ $\Rightarrow$

$$\tau\{mur\to E\}+\tau\{sol\to E\}+\tau\{pes\to E\}+\tau\{H\to E\}=\{0\}$$

$$\tau\{mur\to E\}=\begin{Bmatrix}\vec{N}_B\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_B \qquad \tau\{sol\to E\}=\begin{Bmatrix}\vec{R}=T_A\vec{x}+N_A\vec{y}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_A$$

$$\tau\{pes\to E\}=\begin{Bmatrix}-M\vec{g}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_G \qquad \tau\{H\to E\}=\begin{Bmatrix}-m\vec{g}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_{G'}$$

Exprimons ces torseurs au même point A :

$$\begin{Bmatrix}\vec{N}_B\\ \vec{N}_B\wedge\overrightarrow{BA}\end{Bmatrix}_A+\begin{Bmatrix}T_A\vec{x}+N_A\vec{y}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_A+\begin{Bmatrix}-M\vec{g}\\ -M\vec{g}\wedge\overrightarrow{GA}\end{Bmatrix}_A+\begin{Bmatrix}-m\vec{g}\\ -m\vec{g}\wedge\overrightarrow{G'A}\end{Bmatrix}_A=\begin{Bmatrix}\vec{0}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}$$

$$\vec{N}_B\wedge\overrightarrow{BA}=N_B\vec{x}\wedge(OA\vec{x}-OB\vec{y})=N_B OB\vec{z}=-N_B l\sin\alpha\vec{z}$$

$$-M\vec{g}\wedge\overrightarrow{GA}=-Mg\vec{y}\wedge(IA\vec{x}-IG\vec{y})=Mg\frac{l}{2}\cos\alpha\vec{z} \qquad \left(AG=\frac{l}{2}\right)$$

$$\left\|\overrightarrow{G'A}\right\|=\varepsilon \qquad \text{avec : } 0\langle\varepsilon\langle l$$

$$-m\vec{g}\wedge\overrightarrow{G'A}=-mg\vec{y}\wedge\overrightarrow{G'A}=mg\varepsilon\cos\alpha\vec{z}$$

D'où les équations vectorielles d'équilibre :

$$\begin{cases}\vec{N}_B+T_A\vec{x}+N_A\vec{y}-M\vec{g}-m\vec{g}=\vec{0}\\ -\vec{N}_B l\sin\alpha\vec{z}+Mg\frac{l}{2}\cos\alpha\vec{z}+mg\varepsilon\cos\alpha\vec{z}=\vec{0}\end{cases}$$

Equations algébriques d'équilibre :

Sur $(O,\vec{x})$: $N_B + T_A = 0$ (1) 3

Sur $(O,\vec{y})$: $N_A - Mg - mg = 0$ (2) 3

Sur $(O,\vec{z})$: $-\vec{N}_B l \sin\alpha + Mg\frac{l}{2}\cos\alpha + mg\varepsilon\cos\alpha = 0$ (3) 3

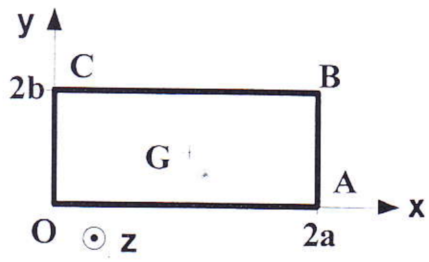
$$N_B = \frac{Mg\frac{l}{2}\cos\alpha + mg\varepsilon\cos\alpha}{l\sin\alpha} \; ; \quad N_A = Mg + mg \; ; \quad T_A = -N_B$$ 1

EXERCICE 3 : **libre**

On considère une plaque rectangulaire homogène de masse **m**, de centre d'inertie **G**, de longueur **2a** et de largeur **2b**.

Déterminer la matrice d'inertie suivante :

au point **G**, relativement à la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$



Solution :

1

$$\left[I_G(S)\right] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \; ; \quad \rho = \frac{m}{2a\times 2b} = \frac{m}{4ab} \; ; \quad P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \int\left(y^2+z^2\right)dm = \int y^2 dm = \int y^2 \rho dx dy = \rho\int_{-b}^{b} y^2 dy \int_{-a}^{a} dx = \rho\frac{4}{3}ab^3 = \frac{mb^2}{3}$$ 1

$$B = \int\left(z^2+x^2\right)dm = \int x^2 dm = \frac{ma^2}{3}$$ 1

$$C = \int\left(x^2+y^2\right)dm = B + A = \frac{ma^2}{3}\left(a^2+b^2\right)$$ 1

$$D = \int yz dm = 0$$

$$E = \int zx dm = 0$$

$$F = \int xy dm = 0$$ (symétrie matérielle)

$$\left[I_G(S)\right] = \begin{bmatrix} \frac{mb^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{3}\left(a^2+b^2\right) \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$ 1