d'où

$$y^2 - z^2 = \varphi\left(\frac{u}{x}, \frac{u}{y+z}\right)$$

ou

$$\varphi\left(y^2 - z^2, \frac{u}{x}, \frac{u}{y+z}\right) = 0.$$ 0,25

0.1.3 Exercice 0.3 2 pts

A) Etude de la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \sin^2\left[\pi\left(n+\frac{1}{n}\right)\right]$, on a

$$\begin{aligned} u_n &= \sin^2\left[\pi\left(n+\frac{1}{n}\right)\right] = \left[\sin \pi n \cos\frac{\pi}{n} + \cos \pi n \sin\frac{\pi}{n}\right]^2 \\ &= \left[(-1)^n \sin\frac{\pi}{n}\right]^2 = \sin^2\frac{\pi}{n}. \end{aligned}$$ 0,5 0,5

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$ 0,5

de plus

$$u_n = \left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^2 \approx \frac{\pi^2}{n^2} \Rightarrow \sum_{n\geq 1} u_n \approx \pi^2 \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}.$$ 0,5

Cette dernière est une série de Riemann convergente, donc $\sum\limits_{n\geq 1} \sin^2\left[\pi\left(n+\frac{1}{n}\right)\right]$ l'est aussi.

B) Etude de la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{3^n - n^3}{5^n - 2^n}$, on a

$$u_n = \frac{3^n - n^3}{5^n - 2^n} = \left(\frac{3}{5}\right)^n \frac{1 - \frac{n^3}{3^n}}{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}$$ 0,5

comme

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1 - \frac{n^3}{3^n}}{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n} = 1$$

0,5

alors

$$u_n \approx \left(\frac{3}{5}\right)^n \Rightarrow \sum_{n\geq 1} u_n \approx \sum_{n\geq 1} \left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

Cette dernière étant la somme d'une progression géométrique convergente, donc $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{3^n - n^3}{5^n - 2^n}$

0,5

l'est aussi.

C) Etude de la nature de la série $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n^2+5n+2}{n^2+5n+7}\right)^{n^3+n+1}$, on a

$$\begin{aligned} u_n &= \left(\frac{n^2+5n+2}{n^2+5n+7}\right)^{n^3+n+1} \\ &= \left[\left(1-\frac{5}{n^2+5n+7}\right)^{n^2+5n+7}\right]^{\frac{n^3+n+1}{n^2+5n+7}} \end{aligned}$$

0,5

d'ou

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

0,5

On applique la règle de Cauchy, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} &= \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1-\frac{5}{n^2+5n+7}\right)^{n^2+5n+7}\right]^{\frac{n^3+n+1}{n^3+5n^2+7n}} \\ &= e^{-5} < 1. \end{aligned}$$

0,5

Ainsi $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n^2+5n+2}{n^2+5n+7}\right)^{n^3+n+1}$ est convergente.

0.1.4 Exercice 0.4 06 pts

1) On a

$$\mathcal{TF}\left(f(t)\right) = F(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itv}dt.$$

Et par définition de la transformée inverse

$$\mathcal{TF}^{-1}(F(v)) = f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(v)\,e^{itv}dv.$$

1

Changeons le v par x,on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{TF}(F(x)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{-ixt}dx \quad 0{,}1 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{ix(-t)}dx = f(-t). \quad 0{,}1
\end{aligned}$$

2) On a

$$\mathcal{TF}(f(at+b)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(at+b)e^{-itv}dt \qquad (*)$$

0,1

Posons $x = at+b \Rightarrow t = \frac{x-b}{a}$ et $dt = \frac{1}{a}dx$. Ainsi $(*)$ devient 0,1

$$\begin{aligned}
\mathcal{TF}(f(at+b)) &= sgn(a)\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\frac{x-b}{a}v}dx \quad 0{,}1 \\
&= sgn(a)\frac{e^{\frac{ib}{a}}}{a\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix\frac{v}{a}}dx \qquad (**)
\end{aligned}$$

$sgn(a)$ découle du changement de variable (les bornes i.e. $t = \pm\infty \Rightarrow x = \pm\, sgn(a) \times \infty$, d'autr part on a $|a| = sgn(a)a$. Donc$(**)$ s'écrit comme suit

0,1

$$\begin{aligned}
\mathcal{TF}(f(at+b)) &= \frac{e^{\frac{ib}{a}}}{|a|}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix\frac{v}{a}}dx\right] \\
&= \frac{e^{\frac{ib}{a}}}{|a|}\widehat{f}\left(\frac{v}{a}\right) \quad 0{,}1
\end{aligned}$$

3)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{TF}\left(f(t)\right) &= F(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-itv} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} (1 - |t|) e^{-itv} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-1}^{0} (1+t) e^{-itv} dt + \int_{0}^{1} (1-t) e^{-itv} dt \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{(1+t)e^{-itv}}{iv} \Bigg|_{t=-1}^{t=0} + \frac{1}{iv} \int_{-1}^{0} e^{-itv} dt \right. \\
&\qquad \left. -\frac{(1-t)e^{-itv}}{iv} \Bigg|_{t=0}^{t=1} - \frac{1}{iv} \int_{0}^{1} e^{-itv} dt \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{1}{iv} - \left(\frac{1}{iv}\right)^2 e^{-itv} \Big|_{t=-1}^{t=0} \right. \\
&\qquad \left. \frac{1}{iv} + \left(\frac{1}{iv}\right)^2 e^{-itv} \Big|_{t=0}^{t=1} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{1}{iv} + \frac{1 - e^{iv}}{v^2} + \frac{1}{iv} - \frac{e^{-iv} - 1}{v^2} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{2 - (e^{iv} + e^{-iv})}{v^2} \right] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1 - \cos v}{v^2} \right] \\
&= \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin^2 \frac{v}{2}}{v^2} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin \frac{v}{2}}{\frac{v}{2}} \right]^2 .
\end{aligned}
$$

0,5

0,5

0,5